



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $G = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \right\}$. Pe G se definește legea „ $*$ ” dată prin

$A * B = AB + \alpha BA + \beta(A + B + I_3)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar I_3 este matricea unitate.

a) Dacă $\alpha = 1$, $\beta = 0$, atunci elementul neutru față de legea dată este $E = \frac{1}{2}I_3$.

b) Dacă $a \neq -2$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, atunci $(G, *)$ este grup comutativ.

Problema 2. Calculați:

a) $\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\ln x}{x^2+1} dx;$

b) $\int_1^e \frac{1 - \ln(x^{-x})}{xe^{-x} - \ln(x^{-x})} dx.$

Problema 3. Se consideră grupul (G, \cdot) cu proprietatea că există un element a al grupului astfel

încât $ax^3a = x$, $\forall x \in G$.

a) Arătați că $x^3 = axa$, $\forall x \in G$.

b) Demonstrați că $x^8 = e$, $\forall x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului.

c) Demonstrați că grupul (G, \cdot) este abelian.

Problema 4. Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_{2021x}^{2022x} \frac{\sin^n t}{t^m} dt$, unde $n, m \in \mathbb{N}$.

(GM 2022)

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.